Nicht für den Austausch

MATHEMATIK

ÜBER DAS GLEICHGEWICHT IM POTENTIALFELD

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
BEI DER NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER SCHLESISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BRESLAU

VORGELEGT VON
KURT BEIER
AUS SCHLEGEL, KREIS GLATZ

BRESLAU 1939

BUCHDRUCKEREI PAUL FELIX, ASCHERSLEBEN

REFERENT: PROFESSOR DR. RADON
KORREFERENT: PROFESSOR DR. FEIGL

EXAMEN RIGOROSUM: 19. JANUAR 1938

GEDRUCKT MIT GENEHMIGUNG DER NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER SCHLESISCHEN FRIEDRICH-WILHELMSU-NIVERSITÄT
ZU BRESLAU

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band 48. 1938. Heft 1/4.

Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band 48. 1938. Heft 1/4.
Herausgeber: E. Sperner, Königsberg i. Pr. / Verlag und Druck: B. G. Teubner, Leipzig.

Über das Gleichgewicht im Potentialfeld.[1])

Von Kurt Beier in Aschersleben.

Eine starre Konfiguration elektrischer Ladungen oder Newtonscher Massen werde in einer bestimmten Lage in ein permanentes reguläres Potentialfeld gebracht. Man sagt, die starre Konfiguration, die kurz als Probekörper bezeichnet sei, befindet sich im stabilen Gleichgewicht, wenn sich die Energie des Probekörpers im Feld bei allen Verrückungen des Probekörpers vergrößert, sofern nur die Verrückungen hinreichend klein gewählt werden. Nach einem Theorem von Earnshaw[2]) ist stabiles Gleichgewicht im regulären Potentialfeld nicht möglich. Der Probekörper habe die stetige räumliche Dichte $k(x, y, z)$ und befinde sich im regulären Potentialfeld $V(x, y, z)$. Zum Beweis des Satzes genügt schon die alleinige Heranziehung translatorischer Verrückungen der Ladungen gegenüber dem Feld. Sind a, b, c die Koordinaten eines im Probekörper fest angenommenen Aufpunktes, so ist die translatorische Energie der Ladungen gegeben durch

$$E(a, b, c) = \int k(x, y, z)\, V(x + a, y + b, z + c)\, dx\, dy\, dz,$$

wobei das Integral über das von den Ladungen eingenommenen Volumen zu erstrecken ist. Daraus erkennt man sofort, daß die Energie E wieder eine reguläre Potentialfunktion ist, also im freien Feld kein Minimum annehmen kann, wie dies für stabiles Gleichgewicht erforderlich wäre. Ebenso ist der Fall des labilen Gleichgewichtes ausgeschlossen. Die Frage des indifferenten Gleichgewichtes, die noch offen bleibt, soll in der vorliegenden Arbeit untersucht werden. Indifferentes Gleichgewicht liegt dann vor, wenn die Energie des Probekörpers bei allen Verrückungen konstant bleibt, sofern nur die Verrückungen hinreichend klein gewählt werden. Wegen der analytischen Abhängigkeit der Energie von den Parametern, die die Lage des Probekörpers bestimmen, muß in diesem Falle die Energie überhaupt konstant sein, unabhängig von der Größe der Verrückungen. Das Problem des indifferenten Gleichgewichtes ist also gleichbedeutend mit der Frage, ob es geeignete Ladungsverteilungen und geeignete

1) Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Breslau als Dissertation angenommen.

2) Vgl. Jeans, The mathematical Theory of Electricity and Magnetism. 4. Aufl. Cambridge 1923, p. 167.

Potentialfelder gibt, so daß die Ladungsverteilungen in diesen Potentialfeldern konstante Energie besitzen. Ist

$$V = T_0 + rT_1 + r^2 T_2 + \cdots$$

die in einer gewissen Kugel gültige Entwicklung des Potentials des Feldes nach Kugelfunktionen und

$$W = \frac{S_0}{r} + \frac{S_1}{r^2} + \frac{S_2}{r^3} + \cdots$$

die außerhalb einer kleineren Kugel gültige Entwicklung des Potentials der Ladungsverteilung nach Kugelfunktionen, so wird sich ergeben, daß der Fall konstanter Energie nur dann eintreten kann, wenn V ein Polynom ist. Ist der Grad n des Polynoms größer als Null, so ist weiter erforderlich, daß $S_0 = S_1 = \cdots = S_n = 0$ ist. Diese Bedingungen sind auch hinreichend.

O sei der Ursprung eines Polarkoordinatensystemes r, φ, ϑ. Es sei eine räumliche Ladungsverteilung von stetiger Dichte k gegeben, die so im Inneren der Einheitskugel angeordnet ist, daß ihr Potential außerhalb einer Kugel $r \geq a < 1$ regulär ist. Diese Ladungsverteilung befinde sich in einem Feld, das durch den Gradienten einer regulären Potentialfunktion V repräsentiert sei, die regulär ist in einer Kugel $r \leq b > 1$. Die Verteilung k besitzt im Feld V die Energie E:

$$E = \int_{k \neq 0} k V \, d\tau, \tag{1}$$

wobei das Integral über das von den Ladungen eingenommene Volumen $k \neq 0$ zu erstrecken ist. Es läßt sich zunächst zeigen, daß sich die Ladungen k durch eine einfache Belegung auf der Oberfläche der Einheitskugel ersetzen lassen, die in jedem für $r \leq b$ regulären Potentialfeld denselben Wert der Energie besitzt wie die ursprünglichen Ladungen.

Um daß zu beweisen, geht man von der Integralformel von Poisson aus, welche die Werte von V im Inneren der Einheitskugel durch die Randwerte auszudrücken gestattet:

$$V(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1 - r^2}{\varrho^3} V(1, \varphi', \vartheta') \, d\sigma. \tag{2}$$

Der Kern $\frac{1 - r^2}{\varrho^3}$ des Integrales ist eine Funktion der beiden Punkte P und Q mit den Koordinaten r, φ, ϑ und r', φ', ϑ'; ϱ ist ihr gegenseitiger Abstand. In der obigen Formel ist P auf das Innere der Einheitskugel, der Integrationspunkt Q auf die Oberfläche derselben be-

schränkt. Man verifiziert sofort, daß unter dieser einschränkenden Bedingung über die Lage von Q die folgende Identität besteht:

$$(3) \qquad \frac{1-r^2}{\varrho^3} = -\frac{1}{\varrho} + 2\frac{1-r\cos\gamma}{\varrho^3} = -\frac{1}{\varrho} - 2\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\varrho},$$

wobei γ den Winkel bedeutet, den die vom Nullpunkt ausgehenden Vektoren nach den Punkten P und Q miteinander bilden, und $\frac{\partial}{\partial\nu}$ die auf der Oberfläche der Einheitskugel genommene Differentiation nach der äußeren Normalen.

Für die reziproke Entfernung der Punkte P und Q gilt die folgende Entwicklung

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho} = P_0(u)\frac{1}{r'} + P_1(u)\frac{r}{r'^2} + \cdots + P_n(u)\frac{r^n}{r'^{n+1}} + \cdots;$$

$P_n(u)$ sind die Legendreschen Polynome, u ist der Kosinus des Winkels γ. Die Entwicklung ist gleichmäßig konvergent, wenn P auf das Innere einer Kugel um den Nullpunkt beschränkt wird und Q auf das Äußere einer konzentrischen größeren Kugel. Man bilde nun

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial r'}\frac{1}{\varrho}\Big|_{r'=1} = -[P_0(u) + 2P_1(u)r + \cdots + (n+1)P_n(u)r^n + \cdots].$$

Beschränkt man P auf das Innere einer Kugel vom Radius a, Q auf die Oberfläche der Einheitskugel, so erhält man auf Grund der Identität (3) die in allen Variablen gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$\frac{1-r^2}{\varrho^3} = P_0(u) + 3P_1(u)r + \cdots + (2n+1)P_n(u)r^n + \cdots$$

Den so entwickelten Kern setze man in die Poissonsche Integralformel ein. Es ergibt sich

$$V(r,\varphi,\vartheta) = \frac{1}{4\pi}\int_{r'=1} V(1,\varphi',\vartheta')\,[P_0(u) + 3P_1(u)r + \cdots + (2n+1)P_n(u)r^n + \cdots]\,d\sigma.$$

Um zu einem geeigneten Ausdruck für die Energie E zu gelangen, multipliziere man beide Seiten dieser Gleichung mit k und integriere über das von den Ladungen eingenommene Volumen $k \neq 0$. Dabei führe man die Integration auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen aus und integriere die im Integranden stehende Entwicklung gliedweise. Das ergibt

$$E = \int_{k\neq 0} kV\,d\tau = \int_{r'=1} V(1,\varphi',\vartheta')\left[\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{k\neq 0} kP_0(u)\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_{k\neq 0} kP_1(u)\,r\,d\tau + \cdots + \frac{2n+1}{4\pi}\int_{k\neq 0} kP_n(u)\,r^n\,d\tau + \cdots\right]d\sigma.$$

Die hier auftretenden Terme $\int\limits_{k \neq 0} k P_n(u) r^n d\tau$ lassen sich durch das von den Ladungen k erzeugte Potential W ausdrücken. Dazu multipliziere man die Entwicklung (4) mit k und integriere nach r, φ, ϑ über das Volumen $k \neq 0$. Dann erhält man

$$W = \int\limits_{k \neq 0} \frac{k}{\varrho} d\tau = \frac{1}{r'} \int\limits_{k \neq 0} k P_0(u) d\tau + \frac{1}{r'^2} \int\limits_{k \neq 0} k P_1(u) d\tau + \cdots + \frac{1}{r'^{n+1}} \int\limits_{k \neq 0} k P_n(u) r^n d\tau + \cdots$$

Anderseits ist W als Potentialfunktion, die für $r \geq a$ regulär ist, in eine Reihe von Kugelfunktionen der folgenden Form entwickelbar:

$$W = \frac{S_0}{r'} + \frac{S_1}{r'^2} + \cdots + \frac{S_n}{r'^{n+1}} + \cdots$$

wobei $S_n = S_n(\varphi', \vartheta')$ eine Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung ist. Die beiden letzten Entwicklungen sind als Potenzreihen in $\frac{1}{r'}$ miteinander identisch, so daß

$$\int\limits_{k \neq 0} k P_n(u) r^n d\tau = S_n(\varphi', \vartheta')$$

ist. Für die Energie E gewinnt man somit den Ausdruck

$$E = \int\limits_{k \neq 0} k V d\tau = \int\limits_{r'=1} V(1, \varphi', \vartheta') \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} S_n(\varphi', \vartheta') \right] d\sigma,$$

oder, wenn man noch zur Abkürzung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} S_n = S$ setzt,

$$E = \int\limits_{k \neq 0} k V d\tau = \int\limits_{r'=1} V(1, \varphi', \vartheta') S d\sigma. \tag{5}$$

Damit ist die Ersetzbarkeit der räumlichen Ladungen k durch eine einfache Belegung S auf der Oberfläche der Einheitskugel nachgewiesen. Diese Schicht S ist, physikalisch gedeutet, nichts anderes als die auf der leitend gedachten und geerdeten Oberfläche der Einheitskugel von den Ladungen k induzierte Schicht, sofern man dieselbe noch mit dem negativen Vorzeichen versieht. Es besteht nämlich der potentialtheoretische Satz, daß eine auf der Oberfläche der Einheitskugel angebrachte Schicht S, die sich in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen $S = S_0 + \frac{3}{4\pi} S_1 + \cdots + \frac{2n+1}{4\pi} S_n + \cdots$ entwickeln läßt, außerhalb und auf der Einheitskugel Veranlassung gibt zu einem Potential vom Wert $W = \frac{1}{r'} S_0 + \frac{1}{r'^2} S_1 + \cdots + \frac{1}{r'^{n+1}} S_n + \cdots$.[2])

2) Jeans, a. a. O., p. 224.

Daraus folgt, daß die äquivalente Schicht S außerhalb und auf der Einheitskugel denselben Wert des Potentials besitzt wie die ursprünglichen Ladungen k. Das negative Potential dieser Schicht, oder auch, das Potential der negativ genommenen Schicht S ergänzt also das Potential der Ladungen k in dem angegebenen Bereich zu Null. Das ist aber die charakteristische Eigenschaft der von den Ladungen induzierten Schicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die vorangehenden Überlegungen lassen sich in genau der gleichen Weise durchführen, wenn an Stelle der räumlichen Ladungen k Punktladungen oder einfache Flächenbelegungen treten. Auch der Fall von Doppelschichten läßt sich analog behandeln.

Der Untersuchung des für die Energie gewonnenen Integrales sind zwei Hilfssätze vorauszuschicken.

Satz 1. Ist

$$W = \frac{S_n}{r^{n+1}} + \frac{S_{n+1}}{r^{n+2}} + \cdots \tag{6}$$

eine Entwicklung nach Kugelfunktionen, die für $r \geq a < 1$ gleichmäßig konvergiert und tritt S_n wirklich auf, so kann man für jedes feste $m \geq n$ eine beliebig kleine Translation der Funktion W angeben, so daß in der neuen Entwicklung der obigen Form die Kugelfunktion $-(m+1)$-ter Ordnung wirklich auftritt.

Für die physikalische Anwendung des Satzes ist diese Formulierung zweckmäßig, in der von einer Translation der Funktion W die Rede ist. Es wird sich bei der Anwendung um die Translation physikalischer Größen handeln, die durch Entwicklungen der obigen Form repräsentiert werden. Für den mathematischen Beweis ist es dagegen bequemer, von der Einführung neuer Koordinatensysteme zu reden. Man hat dann zu zeigen, daß es unter den genannten Voraussetzungen möglich ist, ein neues Polarkoordinatensystem einzuführen, dessen Zentrum bei festgehaltenen Achsenrichtungen dem des ersten beliebig benachbart ist, so daß die Behauptung des Satzes zutreffend ist.

Es soll nun eine spezielle Transformation angegeben werden, die das Verlangte leistet. Jede Kugelfunktion $-(i+1)$-ter Ordnung $\frac{S_i}{r^{i+1}}$ läßt sich als Linearkombination der $(2i+1)$ linear unabhängigen sogenannten Zonal, Tesseral und Sectorial Harmonics darstellen:

$$\frac{S_i}{r^{i+1}} = \frac{a_0 P_i(\cos\vartheta)}{r^{i+1}} + \sum_{m=1} \left[\frac{a_m P_i^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi}{r^{i+1}} + \frac{b_m P_i^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi}{r^{i+1}} \right]$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Führt man ein neues Polarkoordinatensystem r', φ' $(= \varphi)$, ϑ' ein, indem man bei festgehaltenen Achsenrichtungen den Punkt mit Koordinaten (o, o, c) als Ursprung wählt, so gelten für die Funktionen $\frac{P_i(\cos\vartheta)}{r^{i+1}}$, $\frac{P_i^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi}{r^{i+1}}$, $\frac{P_i^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi}{r^{i+1}}$ $(m = 1, 2, \ldots i)$, die folgenden für $r' > c$ gültigen Transformationsformeln[3])

$$\frac{P_i(\cos\vartheta)}{r^{i+1}} = \frac{P_i(\cos\vartheta')}{r'^{i+1}} - c(i+1)\frac{P_{i+1}(\cos\vartheta')}{r'^{i+2}} + c^2\frac{(i+1)(i+2)}{2!}\frac{P_{i+2}(\cos\vartheta')}{r'^{i+3}} - \ldots$$

$$\frac{P_i^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi}{r^{i+1}} = \frac{P_i^m(\cos\vartheta')\cos m\varphi'}{r'^{i+1}} - c(i-m+1)\frac{P_{i+1}^m(\cos\vartheta')\cos m\varphi'}{r'^{i+2}} + c^2\frac{(i-m+1)(i-m+2)}{2!}\frac{P_{i+2}^m(\cos\vartheta')\cos m\varphi'}{r'^{i+3}} - \ldots$$

$$\frac{P_i^m(\cos t)\sin m\varphi}{r^{i+1}} = \frac{P_i^m(\cos\vartheta')\sin m\varphi'}{r'^{i+1}} - c(i-m+1)\frac{P_{i+1}^m(\cos\vartheta')\sin m\varphi'}{r'^{i+2}} + c^2\frac{(i-m+1)(i-m+2)}{2!}\frac{P_{i+2}^m(\cos\vartheta')\sin m\varphi'}{r'^{i+3}} - \ldots$$

Die Reihen sind bei beliebigem $c' > c$ gleichmäßig konvergent für $r' \geq c'$. Diese Formeln liefern zusammen mit der obigen Darstellung von $\frac{S_i}{r^{i+1}}$ die Transformation dieser Kugelfunktion. Es ergibt sich für $\frac{S_i(\varphi, \vartheta)}{r^{i+1}}$ eine unendliche Reihe von Kugelfunktionen, deren erstes Glied $\frac{S_i(\varphi', \vartheta')}{r'^{i+1}}$ ist. Man erkennt noch, daß wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $P_i(\cos\vartheta')$, $P_i^m(\cos\vartheta')\cos m\varphi'$, $P_i^m(\cos\vartheta')\sin m\varphi'$ $(m = 1, 2, \ldots i)$ bei jedem i in der Reihe für $\frac{S_i}{r^{i+1}}$ alle Kugelfunktionen von niedrigerer als der $-(i+1)$-ten Ordnung wirklich auftreten.

c ist sicher so bestimmbar, daß für geeignetes $a' < 1$ der Bereich $r' \geq a'$, der mit B bezeichnet sei, ganz in dem Bereich $r \geq a$ liegt; die Reihe (6) ist dann gleichmäßig konvergent in B. Diese Beziehung gilt bei festem a' für jedes kleinere c. Man darf also $a' > 2c$ annehmen; dann ist in B $r' \leq 2c$; und somit sind die Reihen, die sich nach dem Obigen für die Transformation der $\frac{S_i}{r^{i+1}}$ ergeben, gleichmäßig konvergent in B.

In dem Bereich B ist somit die Funktion W in Abhängigkeit von r', φ', ϑ' dargestellt durch eine gleichmäßig konvergente Reihe, deren

3) Hobson, The Theory of Spherical and Ellipsiodal Harmonics, 1931, p. 140.

Glieder Reihen von Kugelfunktionen sind, die in B ebenfalls gleichmäßig konvergieren. Diese Darstellung hat die folgende Form:

$$W(r', \varphi', \vartheta') = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \frac{T_k^{(i)}(\varphi', \vartheta')}{r'^{k+1}} \right).$$

In dieser Doppelreihe dürfen die Klammern weggelassen und Kugelfunktionen gleicher Ordnung zusammengefaßt werden. Da W in B einschließlich des unendlich fernen Punktes regulär ist, läßt es sich in eine Reihe von Kugelfunktionen

$$W(r', \varphi', \vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T'_i(\varphi', \vartheta')}{r'^{i+1}}$$

entwickeln, die gleichmäßig konvergent ist für $r' \geq a''$ mit geeignetem $a'' < 1$. Die beiden letzten Gleichungen liefern

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{T'_i(\varphi', \vartheta')}{r'^{i+1}} = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \frac{T_k^{(i)}(\varphi', \vartheta')}{r'^{k+1}} \right).$$

Man multipliziere beide Seiten dieser Gleichung mit $P_l(\cos\gamma)$ ($\cos\gamma = \cos\varphi' \cos\varphi'' + \sin\varphi' \sin\varphi'' \cos(\vartheta' - \vartheta'')$, l eine Zahl aus der Reihe 0, 1, 2, . . .) und integriere gliedweise nach φ', ϑ' über die Oberfläche der Einheitskugel $r' = 1$, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz aller auftretenden Reihen gestattet ist. Es gelten nun für jede beliebige Kugelflächenfunktion l-ter Ordnung T_l die bekannten Beziehungen[4])

$$(7) \qquad \int T_l(\varphi', \vartheta') P_s(\cos\gamma)\, d\sigma = \begin{cases} 0 \text{ für } s \neq l \\ \dfrac{2l+1}{4\pi} T_l(\varphi'', \vartheta''), \quad \text{für } s = l, \end{cases}$$

wobei über die Oberfläche der Einheitskugel zu integrieren ist. Daher ergibt sich

$$T_l'(\varphi'', \vartheta'') = \sum_{i=n}^{l} T_l^{(i)}(\varphi'', \vartheta''),$$

woraus nach Ersetzung von φ'', ϑ'' durch φ', ϑ' und Division durch r'^{l+1} die Berechtigung der angegebenen Umformung folgt.

Die Kugelfunktionen der Entwicklung von W um den neuen Ursprung erhält man also, indem man die Glieder der Reihe (6) einzeln transformiert und die auftretenden Kugelfunktionen gleicher Ordnung zusammenfaßt. Die so entstehende Kugelfunktion $-(m+1)$-ter Ordnung setzt sich aus Bestandteilen zusammen, die von den

4) Kellogg, O. D., Foundations of Potential Theory, 1929, p. 252.

Funktionen der Reihe (6) herrühren, deren Ordnung $-(n+1)$, $-(n+2), \ldots, -(m+1)$ beträgt, und ist in Abhängigkeit von c ein Polynom vom Grade $(m-n)$. Der Koeffizient von c^{m-n} rührt vom Glied $\frac{S_n(\varphi,\vartheta)}{r^{n+1}}$ her und ist nach einer obigen Bemerkung nicht identisch Null. Wie auch die von den anderen Funktionen herrührenden Bestandteile ausfallen, durch geeignete Wahl von c, das beliebig verkleinert werden darf, ohne daß die vorangehenden Überlegungen davon betroffen werden, kann man erreichen, daß die Kugelfunktion $-(m+1)$-ter Ordnung nicht identisch Null wird. Das ist aber die Behauptung des Satzes (1).

Satz 2. Es seien S und T zwei auf der Oberfläche der Einheitskugel definierte Funktionen, die sich in gleichmäßig konvergente Reihen von Kugelflächenfunktionen $S=\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ und $T=\sum_{n=0}^{\infty} T_n$ entwickeln lassen. Notwendig und hinreichend dafür, daß die Funktionen bei jeder Lage zueinander orthogonal sind, ist die Bedingung, daß jede der Entwicklungen nur Kugelflächenfunktionen der Ordnung enthält, die in der anderen nicht auftreten. Fordert man, daß das Integral $\int S T\, d\sigma$ einen konstanten, aber von Null verschiedenen Wert besitzt, so dürfen in beiden Entwicklungen die konstanten Glieder nicht verschwinden, und das Auftreten weiterer Glieder ist an die alte Bedingung gebunden.

Jede Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung S_n läßt sich in der folgenden Weise darstellen:

$$(8)\qquad S_n(\varphi,\vartheta) = a_0 P_n(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^{n}\left[a_m \cdot P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi + b_m \cdot P_n^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi\right].$$

Falls S_n nicht identisch verschwindet, kann man bei fester Lage der $P_n(\cos\vartheta)$, $P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi$, $P_n^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi$ durch eine Drehung von S_n erreichen, daß a_0 von Null verschieden ausfällt. Man braucht dazu S_n nur so zu drehen, daß es auf der Achse $\vartheta = 0$ nicht verschwindet. Multipliziert man dann die obige Gleichung mit $P_n(\cos\vartheta)$ und integriert über die Oberfläche der Einheitskugel, so ergibt sich wegen der Orthogonalität der Funktionen $P_n(\cos\vartheta)$, $P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi$, $P_n^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi$ $(m=1,2,\ldots,n)$ gegeneinander

$$\int S_n(\varphi,\vartheta)\cdot P_n(\cos\vartheta)\, d\sigma = a_0 \cdot \int [P_n(\cos\vartheta)]^2\, d\sigma.$$

Daraus erhält man auf Grund der zweiten Gleichung (7)

$$\frac{2n+1}{4\pi} S_n(0, 0) = a_0 \cdot \int [P_n(\cos\vartheta)]^2 d\sigma,$$

und damit die Behauptung, daß a_0 von Null verschieden ist.

Nach dieser Vorbemerkung läßt sich der Beweis des Satzes (2) in folgender Weise führen. Man erteile der Funktion T eine feste Lage und untersuche, was man aus dem Verschwinden des Integrales $\int T S d\sigma$ bei Drehung der Funktion S um die Achse $\vartheta = 0$ schließen kann. Zu diesem Zwecke stelle man die Glieder der Reihe $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ in der durch (8) angegebenen Weise dar:

$$S_n(\varphi, \vartheta) = a_0^{(n)} \cdot P_n(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^{n} (P_n^m(\cos\vartheta)\,[a_m^{(n)} \cos m\varphi + b_m^{(n)} \sin m\varphi]).$$

Die Drehung von S ergibt sich analytisch durch Ersetzung von φ durch $\varphi + \psi$, wenn ψ den Drehwinkel bedeutet. Nach Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme erhält man für die um den Winkel ψ gedrehte Funktion $S_n(\varphi, \vartheta; \psi)$:

$$\begin{aligned}(9)\qquad S_n(\varphi, \vartheta; \psi) &= a_0^{(n)} P_n(\cos\vartheta) \\ &+ \sum_{m=1}^{n} \{\cos m\psi\,[P_n^m(\cos\vartheta)\,(a_m^{(n)} \cos m\varphi + b_m^{(n)} \sin m\varphi)] \\ &+ \sin m\psi\,[P_n^m(\cos\vartheta)\,(b_m^{(n)} \cos m\varphi - a_m^{(n)} \sin m\varphi)]\}.\end{aligned}$$

Summiert man über n von Null bis unendlich, so ist die entstehende Reihe mit der Summe $S(\varphi, \vartheta; \psi)$ in allen drei Variablen gleichmäßig konvergent. Nach Voraussetzung ist

$$\int T(\varphi, \vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\varphi, \vartheta; \psi)\, d\sigma \equiv 0.$$

Man integriere diese Gleichung in der folgenden Weise nach ψ von Null bis 2π:

$$\int T(\varphi, \vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} S_n(\varphi, \vartheta; \psi)\, d\psi\, d\sigma = 0.$$

Auf Grund von (9) ergibt sich wegen der Orthogonalität der Konstanten 1 zu allen Funktionen $\cos m\psi$, $\sin m\psi$ $(m = 1, 2, \ldots)$ im Intervall $(0, 2\pi)$

$$\int T(\varphi, \vartheta) \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{(n)} P_n(\cos\vartheta)\, d\sigma = 0,$$

wobei die auftretende Reihe wieder gleichmäßig konvergent ist, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht. Für die letzte Gleichung kann man weiterhin schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0^{(n)} \int T(\varphi, \vartheta) P_n(\cos\vartheta) d\sigma = 0.$$

Setzt man für T die gleichmäßig konvergente Reihe $T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ ein, so erhält man wegen der Orthogonalitätsrelationen (7) für das Integral $\int T(\varphi, \vartheta) P_n(\cos\vartheta) d\sigma$ den Wert $\frac{2n+1}{4\pi} T_n(0, 0)$. Die letzte Gleichung liefert also schließlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} a_0^{(n)} T_n(0, 0) = 0.$$

Diese Beziehung gilt bei beliebiger Lage der Funktion T; das bedeutet, es gilt identisch in φ, ϑ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} a_0^{(n)} T_n(\varphi, \vartheta) \equiv 0.$$

Das ist eine Reihe von Kugelflächenfunktionen, und man schließt aus dem Verschwinden der Summe auf das Verschwinden der einzelnen Glieder. Tritt nun in der Entwicklung von S ein bestimmtes S_n wirklich auf, so kann man auf Grund der Vorbemerkung zum Beweis annehmen, daß $a_0^{(n)} \neq 0$ ist. Es muß daher T_n identisch verschwinden, d. h. es darf in der Entwicklung von T nicht auftreten. Die Rollen von S und T dürfen natürlich vertauscht werden, und damit ist die erste Behauptung des Satzes (2) bewiesen. Genau in der gleichen Weise läßt sich der zweite Teil beweisen.

Mit Hilfe der Sätze (1) und (2) läßt sich das aufgestellte Gleichgewichtsproblem behandeln. Ist

$$W = \frac{S_0}{r} + \frac{S_1}{r^2} + \cdots + \frac{S_n}{r^{n+1}} + \cdots$$

das für $r \geq a < 1$ reguläre Potential der sich in dem für $r \leq b > 1$ regulären Potentialfeld

$$V = T_0 + r T_1 + \cdots + r^n T_n + \cdots$$

befindlichen Ladungen k und setzt man $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} S_n = S$, $\sum_{n=0}^{\infty} T_n = T$,

so hatten wir als Wert der Energie der Ladungen k im Feld V das über die Oberfläche der Einheitskugel erstreckte Integral

$$E = \int S T \, d\sigma$$

gefunden. Da die Reihe für W im Bereich $r \geq a$ und die Reihe für V im Bereich $r \leq b$ gleichmäßig konvergiert, ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Reihen für S und T aus der Tatsache, daß $T = V\Big|_{r=1}$ und $S = \left(-W - 2\frac{\partial W}{\partial r}\right)\Big|_{r=1}$ ist.

Aus dieser Darstellung der Energie geht wegen der Orthogonalität von Kugelfunktionen verschiedener Ordnung zunächst hervor, daß die Energie sicher dann konstant ist, wenn V konstant ist oder wenn V ein harmonisches Polynom von einem Grad m mit $0 < m \leq n$ und $S_0 = S_1 = \cdots = S_n = 0$ ist. Damit sind aber auch alle Fälle des Gleichgewichtes erschöpft. Es soll nämlich nun umgekehrt gezeigt werden, daß im Falle des Gleichgewichtes V entweder konstant ist oder daß V ein Polynom vom Grad $n > 0$ und $S_0 = S_1 = \cdots = S_n = 0$ ist. Ausgenommen ist nur der triviale Fall, daß es sich bei den Ladungen k um einen elektrisch völlig neutralen Körper handelt, für den die Entwicklung von W identisch verschwindet und der in jedem Potentialfeld im Gleichgewicht ist.

Man mache die Voraussetzung, daß die Energie konstant ist. In der Entwicklung von W tritt eine erste nichtverschwindende Kugelfunktion $\frac{S_m}{r^{m+1}}$ wirklich auf. Es seien die beiden Fälle unterschieden, daß $m = 0$ oder $m \neq 0$ ist. Ist $m = 0$, so muß V konstant sein. Träte nämlich in der Entwicklung von V ein Glied von höherer als der nullten, etwa der l-ten Ordnung auf, so könnte man auf Grund von Satz (1) durch eine Verrückung der Ladungen k erreichen, daß in der Entwicklung von W die Kugelfunktion $-(l+1)$-ter Ordnung wirklich auftritt. In der Entwicklung von S und in der von T würde dann die Kugelflächenfunktion l-ter Ordnung wirklich auftreten, und es wäre somit ein Widerspruch zu Satz (2) hergeleitet. Es sei nun angenommen, daß $m = n + 1 > 0$ ist. Dann muß V ein Polynom sein, dessen Grad höchstens gleich n ist. Andernfalls könnte man genau wie eben durch eine Verrückung der Ladungen k einen Widerspruch zu Satz (2) herleiten. Damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Man wird sich noch davon überzeugen, daß die nach dem gewonnenen Kriterium möglichen Fälle des Gleichgewichtes auch physikalisch realisierbar sind. Bisher wurde von einer physikalischen Deutung der

Funktion V als Potential von Ladungen abgesehen und nur angenommen, daß V in der Kugel $r \leqq b > 1$ der Laplaceschen Differentialgleichung genügt. Das obige Kriterium verlangt eine Ladungsverteilung, die ein in der genannten Kugel reguläres Potential erzeugt, das ein Polynom n-ten Grades ist. Dazu braucht man lediglich auf der Oberfläche einer Kugel von hinreichend großem Radius eine einfache Schicht aufzutragen, deren Dichte durch eine endliche Reihe von Kugelflächenfunktionen bis zur höchstens n-ten Ordnung gegeben ist. In diesem Falle sind die beweglichen Ladungen, um deren Energie es sich handelt, von den felderzeugenden Ladungen lückenlos umschlossen. Diese Tatsache bleibt für jede andere mögliche Verteilung der felderzeugenden Ladungen bestehen, sofern man nur die physikalisch allein interessante Voraussetzung macht, daß die Ladungen ganz im Endlichen gelegen sind. Es ist dann nicht möglich, von der beweglichen Probeladung ausgehend, auf einem von Ladungen freien Weg von endlicher Breite den unendlich fernen Punkt zu erreichen. Im Falle des Gleichgewichtes muß nämlich nach dem gewonnenen Kriterium am Orte der Probeladung das Potential der felderzeugenden Ladungen ein harmonisches Polynom sein, wenn man nur den elektrisch neutralen Körper ausschließt. Könnte man nämlich den unendlich fernen Punkt auf einem Wege der genannten Art erreichen, so könnte man das Potential eindeutig in die Umgebung des unendlich fernen Punktes fortsetzen, und es müßte sich dort so verhalten wie ein Polynom, also für gewisse Richtungen der Annäherung an unendlich dem Betrag nach unendlich werden.

Dem gewonnenen Ergebnis liegt die Voraussetzung zugrunde, daß sich der Probekörper von den felderzeugenden Ladungen durch eine Kugel trennen läßt, die von beiden Ladungen einen positiven Minimalabstand besitzt. Es sei darauf hingewiesen, daß es genügt, diese Voraussetzung für eine einzige Lage des Probekörpers gegenüber dem Feld zu fordern. Die Energie ist dann ganz allgemein konstant, auch wenn man Lagen zuläßt, für die die Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist. Es folgt dies einfach daraus, daß die Energie eine analytische Funktion der Lageparameter des Probekörpers ist, solange man mit dem Probekörper das Regularitätsgebiet des Feldes nicht verläßt.

(Eingegangen am 24. 1. 1938.)

Lebenslauf.

Am 5. Juli 1910 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Max Beier und seiner Ehefrau Rosa, geb. Bittner, in Schlegel, Krs. Glatz geboren. Von der Volksschule meines Heimatortes kam ich auf das Staatliche Katholische Gymnasium in Glatz, das ich Ostern 1929 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Dann studierte ich bis Ostern 1935 in Göttingen und Breslau Mathematik, Physik und Philosophie. Am 29. Mai 1936 legte ich in Breslau die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Seit 1. Oktober 1937 bin ich als Studienreferendar am Stephaneum (Städtische Oberschule für Jungen) in Aschersleben tätig.

Kurt Beier.